

Derivadas direccionales de funciones de dos variables

Una experiencia con GeoGebra

Paolini, Graciela Beatriz

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Avda Alem 1253,

Bahía Blanca, Argentina

gpaolini@uns.edu.ar

Cornejo Endara, Rafael Adrián

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Avda Alem 1253,

Bahía Blanca, Argentina

rcornejo@uns.edu.ar;

1. Introducción

El entorno digital en el aula de matemática, en nuestro caso particular, con estudiantes de carreras de Ingeniería, es una oportunidad que debemos aprovechar para generar un cambio profundo y transversal en nuestras prácticas docentes. No entendemos el uso de la tecnología como una aplicación más del quehacer matemático, sino como fundamento para motivar en los estudiantes un aprendizaje pleno. Su objetivo consiste en construir el aprendizaje a partir de experiencias inmediatamente significativas y plenas de sentido (Perkins, 2009). La experiencia que compartimos en esta ocasión se refiere al tema derivada direccional para funciones de dos variables que se implementó en una cátedra de Análisis Matemático II de la Universidad Nacional del Sur. El potencial de este tema se basa, fundamentalmente, en su estrecha relación con contenidos trabajados en la misma asignatura y otros del Álgebra y de la Geometría, que se resignifican con el objetivo de aplicarlos en la generación de conceptos nuevos para los estudiantes. Siguiendo algunos aspectos demostrados por las neurociencias (Guillén, 2012) se trabaja teniendo en cuenta el tratamiento espiralado, donde un mismo contenido se logra enfocar desde varios aspectos, analizando los distintos significados según el contexto en el que se lo trabaje, como por ejemplo vector gradiente, rectas y semirrectas tangentes, planos y semiplanos y curvas en el espacio como intersección de superficies. Utilizando la potencialidad del GeoGebra, con materiales adecuadamente preparados, se despierta la curiosidad de los estudiantes. Según demostraciones de la Neurociencia, la curiosidad en los estudiantes estimula la atención, activando zonas del cerebro que facilitan el aprendizaje. Con los ejemplos seleccionados, los docentes elaboramos actividades interactivas con GeoGebra para que los estudiantes exploren y, en base a esas experiencias, generen conjeturas. Siguiendo, así, el enfoque reflexivo del aprendizaje pleno, se ubica a los alumnos como conductores del proceso de aprendizaje, estimulando su autonomía. Siguiendo la línea del aprendizaje pleno, las actividades diseñadas tienen como objetivo guiar al estudiante para que se produzca la transferencia deseada entre sus conocimientos previos con la generación de los contenidos nuevos. Otro aspecto a destacar de esta experiencia es que se busca flexibilizar los conocimientos al estimular el cambio de registros de representación semióticas de los contenidos involucrados (Duval, 2006).

2. Desarrollo de la propuesta

Siguiendo esta línea de trabajo, la propuesta en el aula incluyó actividades interactivas con GeoGebra. Se detalla a continuación cada una de las actividades propuestas, el propósito de cada una de ellas, y una breve descripción de la gestión en el aula:

2.1 Interpretando curvas como intersecciones de superficies en el espacio.

Con el objetivo de recuperar las interpretaciones geométricas de las derivadas parciales, se comparte a los estudiantes una actividad interactiva de GeoGebra, que permite de forma fácil poder disponer de las gráficas requeridas.

Para traccionar la actividad, se interpela a los alumnos con la siguiente cuestión: *Interpretando a $z=f(x,y)$ y a $x=y_0$ como ecuaciones de superficies en R^3 ¿Cuál es un significado de la derivada parcial respecto de x en el punto $P=(x_0, y_0)$?* Se propone a los estudiantes que, moviendo los deslizadores y utilizando las casillas de control,

identifiquen las curvas obtenidas al intersectar el gráfico de la superficie con planos paralelos al XZ (Figura 1), seleccionen puntos sobre esas curvas y sus correspondientes rectas tangentes. Solicitando a los estudiantes una ecuación de cada una de esas rectas tangentes se fomenta la articulación de registros de representación semióticos. En esta actividad se recuperan las ideas ya trabajadas desde el álgebra como vector, pendiente de una recta y vector director. También se gestiona otra actividad análoga para interpretar la derivada parcial respecto de la variable y.

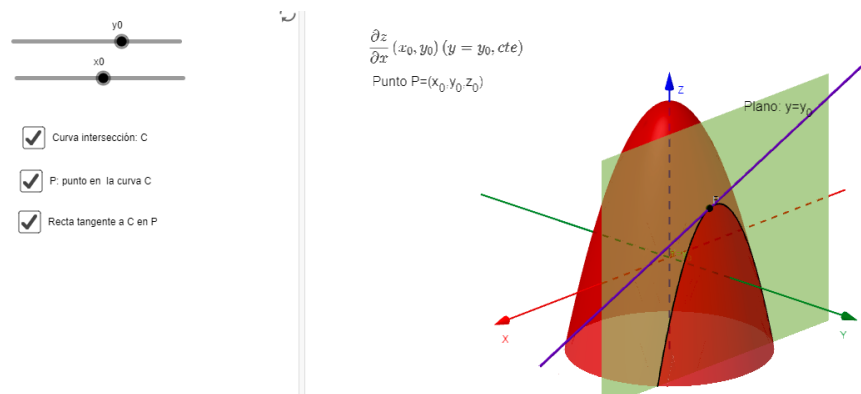


Figura 1: Interpretación geométrica de la derivada parcial respecto de x.

2.2 Identificando rectas y semirrectas tangentes a curvas definidas como intersección de superficies y su relación con las derivadas parciales.

Con esta actividad se pretende recuperar la noción de semirrecta y conjeturar acerca de la existencia o no de rectas tangentes a una curva en el espacio (Figura 2). Nos ocupamos todavía de curvas obtenidas como intersecciones con planos y semiplanos paralelos a los planos coordenados. Se plantea la siguiente consigna: *A partir del gráfico: ¿Puede deducir la existencia de alguna derivada parcial de la función $f(x,y)$ en el punto P? ¿Cuál?* Moviendo el deslizador modifican la posición del punto sobre la recta $x=3$. Utilizando las casillas de control, se propone a los estudiantes que conjeturen acerca de la existencia o no de derivadas parciales y la relación con rectas tangentes a las curvas obtenidas como intersección de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados en los puntos seleccionados.

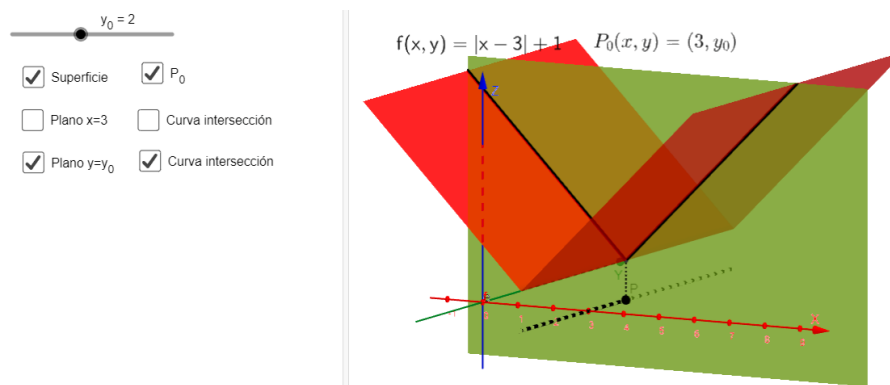


Figura 2: Derivadas parciales y rectas tangentes.

Los aspectos relacionados con las actividades anteriores tomarán un rol importante al construir la noción de derivadas direccionales: surge en forma natural la idea de intersectar la superficie con planos que sean perpendiculares al XY, que pasen por el punto P elegido, pero que no sean paralelos a los planos coordenados. A partir de las exploraciones, y tomando un rol protagónico en la construcción de los aprendizajes, se acompaña a los estudiantes a extender la noción de derivada parcial.

2.3 Extendiendo el concepto de derivada parcial

La intención de la siguiente actividad es estimular la exploración para extender el concepto de derivada cuando las direcciones elegidas no son paralelas a los ejes coordenados.

Moviendo el deslizador (Figura 3) los alumnos obtienen el gráfico de distintos planos perpendiculares al plano XY que pasan por el punto P. Utilizando las casillas de control, se propone que identifiquen las direcciones en las cuales existe recta tangente a la curva intersección en el punto P. Se trabaja en extender la definición de derivada en el caso que las direcciones no coincidan con las de los ejes. Reconociendo la derivada como el límite de un cociente incremental y recuperando la representación paramétrica de semirrecta en el plano, se construye la definición de la derivada direccional y se hallan ecuaciones para las semirrectas tangentes. Manteniendo la propuesta del tratamiento espiralado de los contenidos, con esta actividad se relacionan las nociones de versor, rectas y semirrectas tangentes y se trabaja con distintas representaciones de las mismas que los alumnos utilizaron en la asignatura Álgebra y Geometría. Se recupera la noción de superficies cilíndricas, en el caso particular que la curva directriz es una recta o semirrecta.

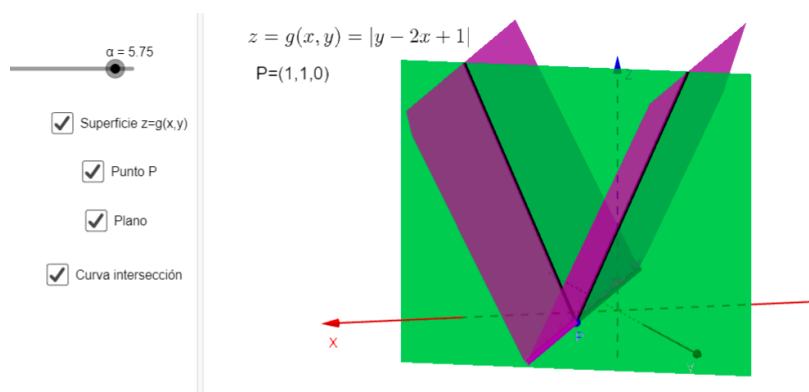


Figura 3: Derivadas direccionales. Interpretación geométrica.

2.4 Reconociendo semirrectas tangentes a las curvas obtenidas

Los objetivos de esta actividad son que los alumnos reconozcan las semirrectas tangentes a las curvas obtenidas e identifiquen las pendientes de las mismas.

Continuando con el proceso planteado en la actividad anterior, se propone una función derivable en el punto indicado (Figura 4) y se propone la misma consigna. En este caso, al encontrar direcciones en las cuales las curvas en la superficie admiten recta tangente en el punto, se indaga a los participantes acerca de una ecuación de cada una de esas rectas. Con la exploración propuesta en esta actividad y la experiencia de las anteriores, se conjetura acerca de la existencia de las derivadas parciales y la relación con ciertas derivadas direccionales particulares.

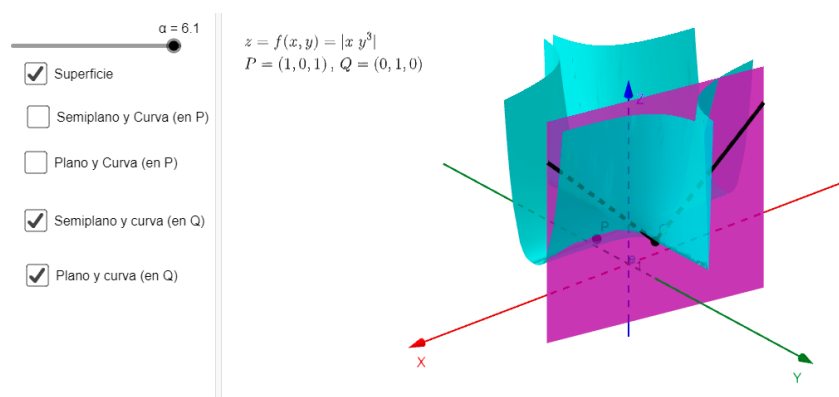


Figura 4: Derivadas direccionales y parciales. Semirrectas tangentes.

Para formalizar los contenidos trabajados, se realiza una puesta en común guiada:

- Se recuperan las nociones de derivada como límite de un cociente incremental, ideas trabajadas en la asignatura Análisis matemático I, las expresiones paramétricas de semirrectas tangentes, contenidos que ya fueron abordados principalmente en la materia Álgebra y Geometría y se formaliza la definición de derivada direccional.
- Se retoman los resultados de las conjeturas de los estudiantes, justificando analíticamente la validez o no de las mismas.

2.5 Transfiriendo lo estudiando

Con el objetivo de reconocer si se alcanzó un aprendizaje pleno del tema, se plantea ahora la oportunidad de transferir los aspectos desarrollados sobre derivadas direccionales a nuevas situaciones. A partir de la exploración en la siguiente actividad (Figura 5), se pretende extender los razonamientos anteriores para abordar situaciones nuevas y brindar herramientas que estimulen un pensamiento crítico. La consigna es buscar una función $f(x,y)$ tal que la nueva función $h(x,y)=g(x,y)+f(x,y)$ admita recta tangente en el punto y en la dirección de la actividad anterior, pero con pendiente dada y distinta de cero.

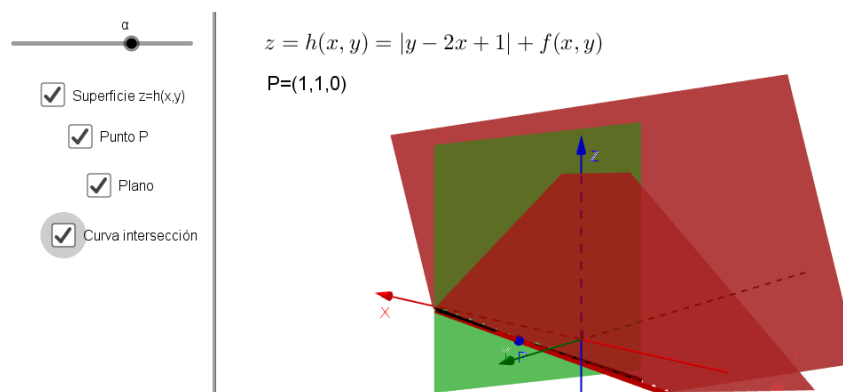


Figura 5: Actividad interactiva para conjeturar.

- Como cierre de la propuesta, los estudiantes deben elaborar y presentar un breve informe sobre los resultados que obtienen de la última actividad, pudiendo solicitarse que los expliquen al resto del curso. Al momento de defender sus afirmaciones, se requiere validar éstas enunciando los aspectos teóricos que las sustentan ya que como dice Morgado Bernal: *Nadie puede estar seguro de saber algo si no lo ha demostrado explícitamente, es decir, exponiéndolo verbalmente o por escrito.*

3. Conclusiones.

Las actividades interactivas con GeoGebra permiten atraer la atención de los estudiantes. Eligiendo ejemplos adecuados se logra que, participando activamente de la experiencia, los estudiantes generen aprendizaje pleno sobre el contenido involucrado. En este caso, reconstruyendo el conocimiento sobre las derivadas parciales, se fomenta su comprensión y se detectan aquellos aspectos que no habían sido bien interpretados. Con las actividades seleccionadas, se orienta la búsqueda de la información necesaria para complementar el tema, haciendo natural la definición de derivadas direccionales.

Referencias:

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registros de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

Guillén, Jesús (2017) *Neuroeducación en el aula: De la teoría a la práctica*, CreateSpace.

Maggio, Mariana (2012) *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. Paidós.

Morgado Bernal, Ignacio (2012) *Claves neurocientíficas de la enseñanza y el aprendizaje* Participación Educativa. revista del consejo escolar de estado. Segunda Época. Vol 1. N° 1, 15-17.

Perkins, David. (2009). *El aprendizaje pleno. Principios de la enseñanza para transformar la educación*. Paidós